

DL3 — Intégrales

On pose $I_0 = \int_1^e t \, dt$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \int_1^e t(\ln(t))^n \, dt.$$

1.
 - a. Calculer I_0 .
 - b. Justifier que pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
 - c. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.
2. Pour tout entier naturel n , soit f_n la fonction définie sur $[1, e]$ par $f_n(t) = (\ln(t))^{n+1}$.
 - a. Pour tout $t \in [1, e]$, calculer $f'_n(t)$.
 - b. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout entier naturel n , la relation

$$2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2.$$
 - c. En déduire la valeur de I_1 .
 - d. En utilisant la relation ci-dessus et la décroissance de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$, établir que pour tout entier naturel n , on a

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

- e. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.
3.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$\frac{(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)} \leq 2I_{n+1} + I_n \leq \frac{(3n+7)e^2}{(n+2)(n+3)}.$$
 - b. Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = n(e^2 - nI_n)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3e^2$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left(e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right).$$

D'après ESCP 2018.